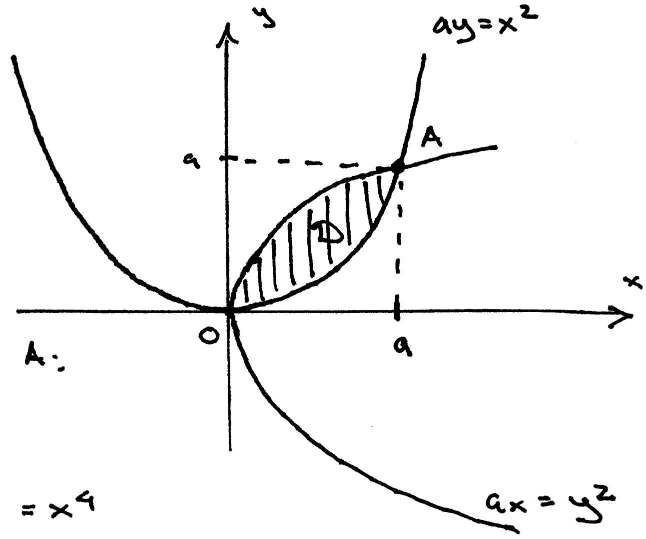
Correction de l'épreuve du 09/06/2009

MMP L2 S4 session 2

Exercice 1.



On cherche l'aire du domaine D représenté sur le dessin.

Calculons d'abord les coordonnées du point d'intersection A :

$$\begin{cases} ay = x^2 \\ ax = y^2 \end{cases} \Rightarrow \quad ax = \left(\frac{x^2}{a}\right)^2 \Rightarrow \quad a^3 x = x^4$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0,\ y = 0 \quad \text{(origine)}$$

ou $x^3 = a^3 \Rightarrow \boxed{x = a,\ y = a}$

$$\Downarrow$$

$$A = (a, a)$$

Maintenant on peut écrire l'aire (intégrale double $S = \iint_D dx\,dy$) comme une intégrale itérée :

$$S = \int_0^a dx \int_{x^2/a}^{\sqrt{ax}} dy = \int_0^a dx \left(\sqrt{a}\sqrt{x} - \frac{x^2}{a}\right) = \left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\, x^{3/2} - \frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_0^a$$

$$= \frac{2}{3}a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{3}.$$

Alors la masse de la plaque est égale à $m = \frac{\sigma a^2}{3}$.

Exercice 2.

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$$

2.1). Calculons le champ du gradient

$$\vec{E} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2) = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2) = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

et donc $\vec{E} = \frac{2x}{x^2+y^2}\vec{e}_x + \frac{2y}{x^2+y^2}\vec{e}_y$.

Notons que

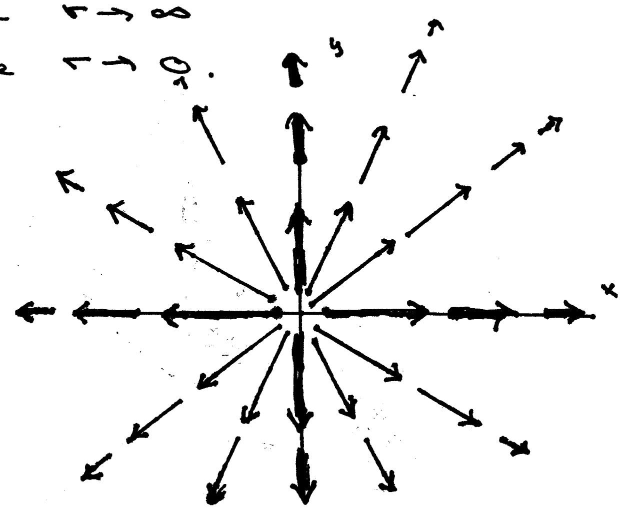
i). $\vec{E} = \frac{2\vec{r}}{r^2} = \frac{2}{r}\vec{e}_r \Longrightarrow \vec{E} \parallel \vec{e}_r$ (direction radiale)

ii). $|\vec{E}| = \frac{2}{r}$ (le module de $\vec{E}$ ne dépend que de r)

iii). $|\vec{E}| \to 0$ lorsque $r \to \infty$

$|\vec{E}| \to +\infty$ lorsque $r \to 0$.

D'où la représentation graphique suivante :



2.2). $\int_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$

où B et A sont les points initial et final de γ. Donc

$$\int_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{r} = f(4,5) - f(0,1) = \ln(16+25) - \ln 1 = \ln 41.$$

<u>Exercice 3</u>

On aimerait appliquer le théorème de Gauss-Ostrogradsky. Par contre notre surface n'est pas fermée $\Rightarrow$ on n'a pas droit de le faire. D'autre part, on remarque que le flux de $\vec{E}$ à travers le cercle $x^2+y^2 \leq R^2$, $z=0$ est égale à 0, car :

1). la normale au plan du cercle (plan xy) coïncide avec $\vec{e}_z$ et est donc orthogonale à $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.

2). flux à travers le cercle $= \int_{\text{cercle}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{cercle}} E_z \, dS =$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} xy \, dx\, dy$$

3). en coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ dx\,dy \to r\,dr\,d\varphi \end{cases}$ cette dernière intégrale se transforme en

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \; r\cos\varphi \, r\sin\varphi \cdot r = \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi \, d\varphi = 0$$

car $\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi \, d\varphi = \left(-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0.$

Conclusion: le flux à travers S (surface non-fermée) est égal au flux à travers S + cercle $x^2+y^2 \le R^2$, $z=0$ (surface fermée). Ce dernier peut être calculé à l'aide du théorème de Gauss:

$$\Phi = \int_S \vec{E}\, d\vec{S} = \int_{S \cup \text{cercle}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\substack{\text{volume} \\ \text{de la demi-sphère} \\ x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ z \ge 0}} \operatorname{div} \vec{E}\, dV =$$

$$= \int_{\substack{\text{demi-} \\ \text{sphère}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) \right\} dV = 0.$$

Exercice 4 1). Les pôles de $f(z) = \dfrac{z}{\sin^2 \pi z}$ peuvent correspondre uniquement aux zéros du dénominateur:

$$\sin \pi z = 0 \Rightarrow \pi z = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z \in \mathbb{Z}$$

En effet, il faut distinguer 2 cas:

1.1). $z = 0 \Rightarrow f(z) = \dfrac{z}{\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots\right)^2} = \dfrac{z}{z^2\left(1 - \frac{z^2}{6} + \dots\right)^2} =$

$$= \frac{1}{z}\left(1 + \frac{z^2}{3} - \dots\right) \quad \left(\begin{array}{c} z=0 \\ \text{est un} \\ \text{pôle simple} \end{array}\right)$$

1.2). $z = k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ on développe $\sin \pi z$ autour de $z = k$

$$\sin \pi z = \underbrace{\sin \pi z \Big|_{z=k}}_{0} + \underbrace{\frac{(\sin \pi z)'_z}{1!}\Big|_{z=k}}_{\pi(-1)^k} (z-k) + \frac{(\sin \pi z)''_z}{2!}\Big|_{z=k} (z-k)^2 + \dots =$$

$$= (-1)^k \pi (z-k) + O\left((z-k)^2\right)$$

Par conséquent

$$f(z \to k) \sim \frac{k + (z-k)}{\left[(-1)^k \pi (z-k) + \dots\right]^2} \sim \frac{k}{\pi^2 (z-k)^2} + \dots$$

et donc $z = k \neq 0$ est un pôle d'ordre 2.

2). $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3\cos\theta + 2\sin\theta + 7} = \left| \begin{array}{l} \text{après le changement} \\ \text{de variable } z = e^{i\theta} \\ dz = i e^{i\theta} d\theta = i z \, d\theta \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2} \\ \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} \end{array} \right| =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(3 \frac{z+z^{-1}}{2} + 2 \frac{z - z^{-1}}{2i} + 7\right)} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{i}\right) z^2 + 7z + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{i}\right)}$$

$$= 2\pi \sum_{\substack{\text{points} \\ \text{singuliers} \\ \text{à l'intérieur} \\ \text{de } |z|=1}} \operatorname{res} \frac{1}{\left(\frac{3}{2} - i\right) z^2 + 7z + \left(\frac{3}{2} + i\right)}$$

Étudions maintenant l'équation

$$\left(\frac{3}{2} - i\right) z^2 + 7z + \left(\frac{3}{2} + i\right) = 0$$

$$\Delta = 49 - 4\left(\frac{3}{2} - i\right)\left(\frac{3}{2} + i\right) = 49 - 4\left(\frac{9}{4} + 1\right) = 36 = 6^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-7 + 6}{2\left(\frac{3}{2} - i\right)} = -\dfrac{1}{3 - 2i} \\ z_2 = \dfrac{-7 - 6}{2\left(\frac{3}{2} - i\right)} = -\dfrac{13}{3 - 2i} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $|z_1| < 1$ et $|z_2| > 1$, alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3\cos\theta + 2\sin\theta + 7} = 2\pi \operatorname*{res}_{z = z_1} \frac{1}{\left(\frac{3}{2} - i\right)(z - z_1)(z - z_2)} =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{2} - i\right)(z_1 - z_2)} = \frac{2\pi}{\left(\frac{3}{2} - i\right)\left(-\frac{1}{3 - 2i} + \frac{13}{3 - 2i}\right)} =$$

$$= \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$